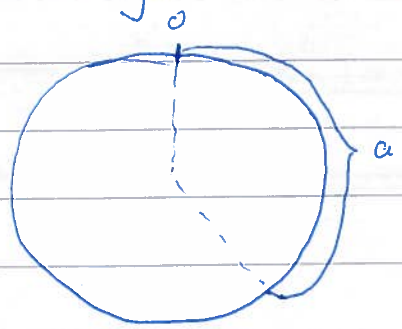
3.4 Kontinuerlege sannsynsfordelingar

Eks. Rulette hjul. Snurrar ei pil til ho stansar

Hending: Pila stoppar i intervallet $[0, a]$, $0 \leq a \leq 2\pi$



$$P([0, a]) = \frac{a}{2\pi} = \int_0^a \frac{1}{2\pi}\, dt$$

P er eit eksempel på ein sannsynsfunksjon

Definisjon 3.4.1. Ein sannsynsfunksjon, P, på ei mengde reelle tal er kalla kontinuerleg dersom det eksisterer ein funksjon $f(t)$ s.a. for alle lukka intervall $[a, b] \subset S$ har vi at $P([a,b]) = \int_a^b f(t)\, dt$

Vi må ha:

$$f(t) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

Definisjon 3.4.2

La Y vere ein funksjon frå utfallsrommet, S, og inn i R

Y er kalla ein kontinuerleg fordelt tilfeldig variabel dersom det eksisterer ein funksjon $f_Y(y)$ s.a. for alle reelle tal a og b, $a < b$ har vi at $P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy$

Funksjonen $f_Y(y)$ er sannsynstettleiken til den tilfeldige variabelen Y og må oppfylle

1. $f_Y(y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) = 1$
3. $P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f_Y(y)\, dy$

Kumulativ fordelingsfunksjon er definert ved

$$F_Y(y) \overset{D}{=} P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = P(\{e \in S \mid Y(e) \le y\})$$

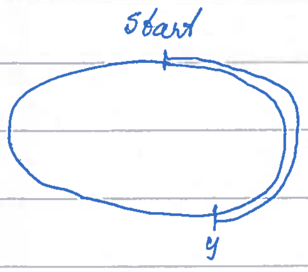
Teorem 3.4.1 $\frac{d}{dy} F_Y(y) = f_Y(y)$ i dei punkt der $f_Y(y)$ er kontinuerleg.

Eks. Avrundingsfeil ved målingar. Avrunding til næraste heiltal. La Y vere avrundingsfeil

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{dersom } -0.5 < y \le 0.5 \\ 0 & \text{elles.} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \begin{cases} 0, & y \le -0.5 \\ y + \frac{1}{2}, & -0.5 < y \le 0.5 \\ 1, & y > 0.5 \end{cases}$$

Eks. Joggetur i rundløype (9km). Mista husnøkkelen

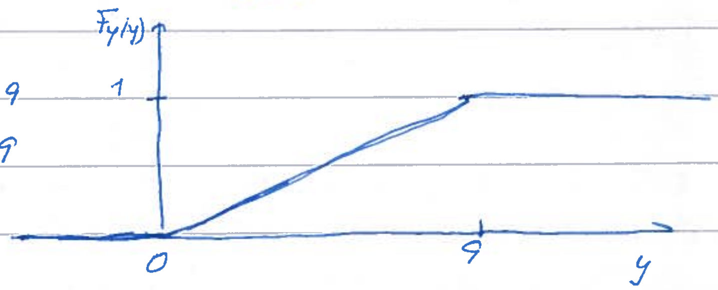


Y er posisjonen der husnøkkelen er mista (målt i km) frå starten av løypa

$$f_Y(y) = k, \quad 0 \le y \le 9$$

$$\int_0^9 k\,dt = 1 \iff k \cdot 9 = 1 \implies k = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 0 \le y \le 9 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{9}, & 0 \le y \le 9 \\ 1, & y > 9 \end{cases}$$



$$P(4.6 \le Y \le 6.3) = \int_{4.6}^{6.3} \frac{1}{9}\, dt = P(Y \le 6.3) - P(Y \le 4.6)$$

$$= \frac{6.3 - 4.6}{9} = \frac{1.7}{9} \approx 0.19$$

NB! For kontinuerleg fordelte variable er alle punktsannsyn 0.

s.a. $P(a \le Y \le b) = P(Y=a) + P(a < Y < b) + P(Y=b)$

$$= P(a < Y < b) = \int_a^b f_Y(y)\, dy$$

3.5 Forventning til tilfeldige variable

Eks. Oljeselskap. Er utvinning lønnsomt

Utfallsrom	$P(e)$	
e_1	0.2	-20
e_2	0.1	5
e_3	0.2	5
e_4	0.5	10

k	-20	5	10
$P(X=k)$	0.2	0.3	0.5

Eks. x_i : 2, 2, 2, 3, 3, 6

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{2 \cdot 3}{6} + \frac{3 \cdot 2}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \sum_k k \text{ relfrekv}(k) \quad \text{der}$$

k er verdiane 2, 3 og 6.

Definisjon 3.5.1

La X vere ein diskret tilfeldig variabel med punktsannsyn $p_X(k) = P(X=k)$. Forventa verdi til X, $E[X]$ er gitt ved:

$$E[X] = \sum_{\text{alle } k} k \cdot P(X=k) = \mu_X = \mu \quad \text{dersom eks.}$$

Tilsvarande for ein kontinuerleg tilfeldig variabel er

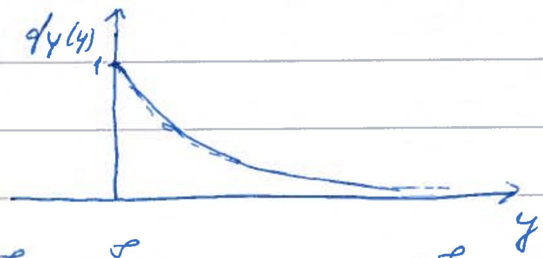
$$E[X] = \mu = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_Y(y)\, dy, \quad \text{dersom eks.}$$

Eks Oljeselskap

$$E[X] = -20 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.5 = 2.5$$

Eks. levetid for lyspærer i 1000 timar

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$$



$$E[Y] = \int_0^{\infty} y e^{-y}\, dy = \left[-y e^{-y}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$(xy)' = x'y + y'x \Rightarrow \int xy' = \int (xy)' - \int x'y$$

Eks. $X \sim B(n,p)$ $\begin{cases} n \text{ uavh. forsøk} \\ \text{Reg } A \text{ eller } A^c \\ P(A) = p = \text{konstant.} \end{cases}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$